Equazioni del secondo ordine riducibili al primo ordine

Caso 2: Equazioni autonome (mancanti della variabile t).

$$\begin{cases} y'' = f(y, y') \\ y(t_0) = a \\ y'(t_0) = b \end{cases}$$

♣ Si pone $y' = w(y)$ e la y diventa "variabile indipendente" (gioca il ruolo di t).

Si ha

$$y'' = \frac{d}{dt}(w(y)) = w'(y)y' \;\Rightarrow\; y'' = w'w.$$

♣ Sostituendo $y'' = w'w$ e $y' = w$ nel problema di Cauchy nell'incognita y, si ottiene il problema di Cauchy del **primo ordine** nell'incognita w

$$\begin{cases} w'w = f(y, w) \\ w(a) = b. \end{cases}$$

(infatti $b = y'(t_0) = w(y(t_0)) = w(a)$).

♢ Ricordare che in questo contesto y gioca il ruolo di t!

Esercizio 6

Risolvere

$$\begin{cases} y'' = e^y y' \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = e. \end{cases}$$

Sia I l'intervallo massimale di esistenza.
Sostituzione: Ponendo $w(y) = y'$ ci riconduciamo al sistema in w

$$\begin{cases} w'(y)w(y) = e^y w(y) \\ w(1) = e \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} w'(y) = e^y \\ w(1) = e. \end{cases}$$

Risoluzione del problema in w: si ha

$$w(y) = w(1) + \int_1^y e^s \, \mathrm{d}s = e^y.$$

Risoluzione del problema in y: Poiché $y' = w(y)$ si trova il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = e^{y(t)} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

e separando le variabili

$$\int_1^{y(t)} e^{-y} \, \mathrm{d}y = \int_0^t \mathrm{d}s \Rightarrow \left[-e^{-y}\right]_1^{y(t)} = t$$

da cui $-e^{-y(t)} + e^{-1} = t$

$$\Rightarrow \; y(t) = -\ln(e^{-1} - t) \quad \forall\, t \in I = (-\infty, \tfrac{1}{e}).$$

Esercizio 7

Risolvere

$$\begin{cases} y'' = -2\sin(y)\cos^3(y) \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

Sostituzione: Ponendo $y' = w(y)$ ci riconduciamo al sistema in w

$$\begin{cases} w'w = -2\sin(y)\cos^3(y) \\ w(0) = 1 \end{cases}$$

Risoluzione del problema in w: L'equazione in w è a variabili separabili (con y come variabile indipendente), quindi

$$\int_{w(0)}^{w(y)} w \, \mathrm{d}w = \int_0^y -2\sin(s)\cos^3(s)\, \mathrm{d}s$$

e cioè

$$\frac{w^2(y)}{2} - \frac{w(0)}{2} = \frac{\cos^4(y)}{2} - \frac{1}{2}.$$

Usando $w(0) = 1$ (quindi w assume valori positivi per valori di y vicini a 0) concludiamo

$$w(y) = \cos^2(y).$$

Risoluzione del problema in y: Poiché $y' = w(y)$ si trova il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \cos^2(y) \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Si noti che posso dividere l'equazione differenziale per $\cos^2(y)$: in effetti, dalla condizione iniziale (e dalla continuità della funzione $t \mapsto y(t)$) deduco che, per t "vicino" a 1, $y(t)$ è "vicino" a 0 e quindi $\cos^2(y(t))$ è "vicino" a $\cos(0) = 1$. Separo le variabili e, ricordando che $y(0) = 1$, ottengo

$$\int_0^{y(t)} \frac{1}{\cos^2(y)} \, \mathrm{d}y = \int_1^t 1 \, \mathrm{d}s$$

da cui

$$\tan y(t) = t - 1 \;\Rightarrow\; y(t) = \arctan(t - 1).$$

Esercizio 8

Risolvere

$$\begin{cases} y''(t) = 2y(t)y'(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Sia I l'intervallo massimale di esistenza.

<u>Sostituzione:</u> Ponendo $y' = w(y)$ ci riconduciamo al problema in w

$$\begin{cases} w'(y) = 2y \\ w(0) = 1 \end{cases}$$

<u>Risoluzione del problema in w:</u> Si ha subito

$$w(y) = w(0) + \int_0^y 2s \, \mathrm{d}s = 1 + y^2$$

<u>Risoluzione del problema in y:</u> Poiché $y' = w(y)$ si trova il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 + 1 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Separo le variabili e ottengo

$$\int_0^{y(t)} \frac{1}{1+y^2} \, \mathrm{d}y = \int_0^t 1 \, \mathrm{d}s$$

da cui

$$\arctan(y(t)) = t \Rightarrow y(t) = \tan(t) \ \forall\, t \in I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Esercizio 9

Risolvere

$$\begin{cases} y''(t) = y(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Sostituzione: Ponendo $y' = w(y)$ ci riconduciamo al problema in w

$$\begin{cases} w'(y)w(y) = y \\ w(0) = 1 \end{cases}$$

Risoluzione del problema in w: separando le variabili ottengo subito

$$\frac{1}{2}w^2(y) - \frac{1}{2}w^2(0) = \frac{1}{2}y^2$$

da cui $w^2(y) = y^2 + 1$. Usando $w(0) = 1$ (quindi w assume valori positivi per valori di y vicini a 0) concludiamo

$$w(y) = \sqrt{y^2 + 1}.$$

Risoluzione del problema in y: Poiché $y' = w(y)$ si trova il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y^2 + 1} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Separo le variabili e ottengo

$$\int_0^{y(t)} \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,\mathrm{d}y = \int_0^t 1\,\mathrm{d}s.$$

Ora mi ricordo che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sinh^{-1}(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

(alternativamente, tratto l'integrale con la sostituzione $y = \sinh(\zeta)$), e ottengo quindi

$$\begin{gathered}\sinh^{-1}(y(t)) - \sinh^{-1}(0) = t,\\ \text{da cui } y(t) = \sinh(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.\end{gathered}$$